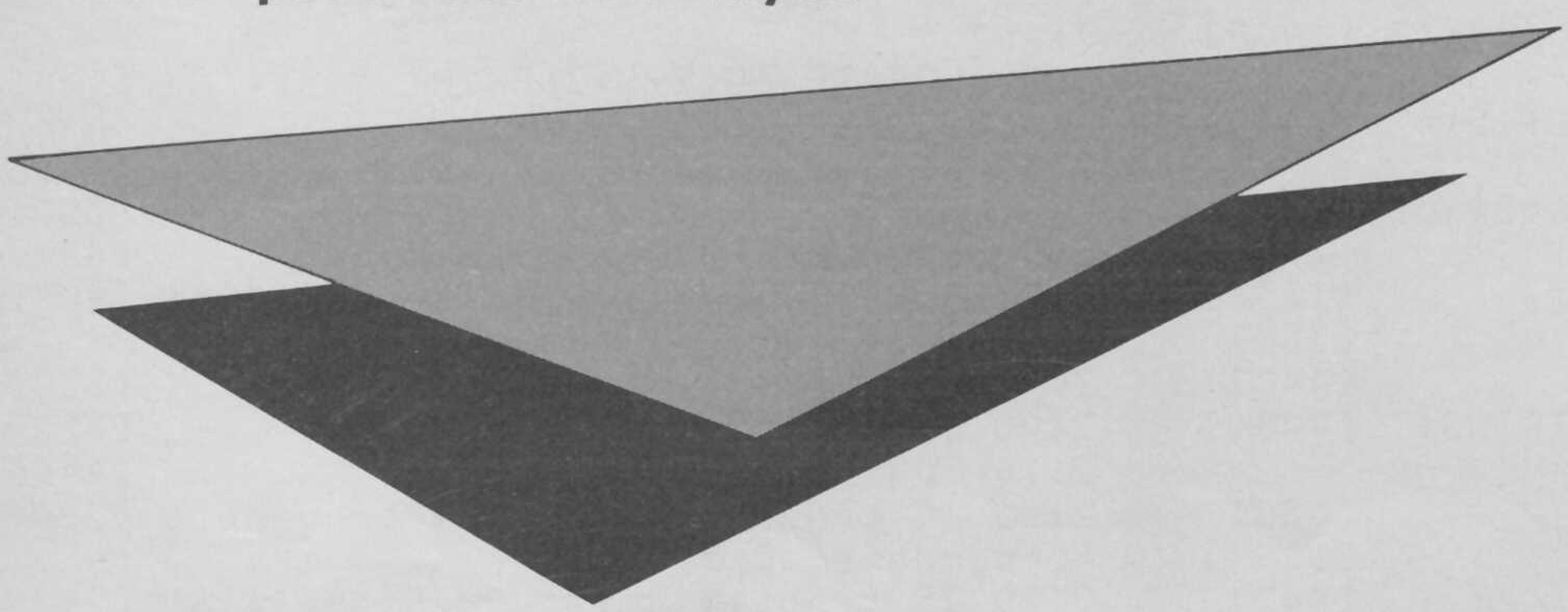
MATHEZ VOTRE AMSTRAD

A la demande de nombreux lecteurs et parce que vous avez maintenant atteint un bon niveau de programmation, nous allons ce mois-ci vous exposer le calcul intégral (pas trop compliqué) et une de ses plus célèbres applications : le calcul des différents coefficients de Fourier. Nous nous offrons en plus le luxe d'une petite analyse syntaxique histoire de débuter un peu dans le domaine. Soit dit en passant, si vous avez des programmes assez performants dans cette branche (aussi bien littéraire) n'hésitez pas à nous les envoyez.



Utilisation du programme

Après avoir tapé tout le programme, vérifiez-le (par pitié !) car il est très fréquent d'oublier un indice ou de ne pas réinitialiser une variable. Ceci dit faites Run, vous devrez répondre à une question qui vous demande votre fonction. Si vous ne l'avez pas programmée faites-le puis relancez le programme. Ensuite si vous désirez un calcul tout simple de l'intégrale de votre fonction appuyez sur i et fournissez l'intervalle de calcul comme par exemple : 2,4 ou − pi/2,3 × pi/4 ou bien − 2 × pi, 4.5 etc. puis attendez un peu (entre 5 et 30 secondes) que le résultat s'affiche avec environ une précision de 10E − 6. Si par contre vous désirez les coefficients de Fourier, vous appuyez sur f puis vous donnez le nombre de termes désirés (ils marchent par paires) et la période, la syntaxe étant la même que précédemment. Ici, la précision ne va que jusqu'à 10E − 5 ce qui est honorable ; c'est surtout dû à un souci de clarté et de simplicité comme l'explique le paragraphe suivant. (Vous n'êtes pas obligés de le lire).

Pour ceux qui veulent approfondir

Attaquons-nous d'abord au calcul intégral en faisant quelques petits rappels. L'intégrale telle qu'on la définit est F(a) − F(b) $= \int_a^b f(t)\,dt$, avec F(a) la valeur de la primitive au point a, de même pour le point b. L'intégrale sert entre autres à calculer une aire (l'aire arithmétique). C'est la raison pour laquelle son unité s'exprime en U.A (unité d'aire).

Mais comment la calculer numériquement ? Il suffit pour cela de revenir à la définition de l'intégrale au sens de Riemann et de l'interprêter. Il s'agit en fait d'une somme dans un intervalle à plusieurs fonctions en escalier bien choisies. Aussi nous assimilerons la courbe à différents segments de droites. C'est ce qu'on appelle la méthode des trapèzes. Les deux bouts de chaque segment délimitent par leurs abcisses une sorte de trapèze. Vous comprenez que plus il y aura de trapèzes et plus l'approximation sera précise. On calcule donc comme suit : soit un intervalle (a,b) fixé, on détermine arbitrairement le nombre de sous-intervalles (plus il y en a, plus la précision augmente et plus le temps de calcul augmente). (Nous avons pris ni = 300 comme compromis, à vous de voir).

On calcule le pas d'incrément par w = b − a/ni. Puis on considère l'intervalle centré sur un xn tel qu'on ait une recherche sur °xn − w, xn + w. On assimile la courbe à deux segments de droite ce qui nous donne la valeur de I1 de l'intégrale en fonction du nombre d'intervalles fixés, on a donc

$$I1 = w \frac{f(xn) + f(xn+w)}{2}$$

; or la valeur approchée de l'intégrale est I0 = I1 + I2 + I3 + ... + In. En d'autres termes.

$$Io = \sum_{n=1}^{k-1} In$$

Cependant on arrive à avoir plus précis avec la formule suivante :

$$I = Io + \frac{w}{12} (f'(a) - f'(b))$$

$$\text{où } f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2\,h}$$

$$\text{et } f'(b) = \frac{f(b+h) - f(b-h)}{2\,h}$$

sont les dérivées aux points a et b. Pour ce qui est du calcul des coefficients de Fourier on démontre que si une fonction admet une décomposition en série de Fourier elle est unique et se présente comme suit : f(x) = AO + A1cos wx + A2cos2wx + ... Ancosnwx + B1sin wx + B2sin2wx + ... + B3sin nwx avec :

$$Ao = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

$$An = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\,wx\,dx$$

(ligne 780)

$$\text{avec } w = \frac{2M}{T}$$

$$Bn = \frac{2}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\,wx\,dx$$

(ligne 790)

Le programme

Nous n'allons pas décrire le programme en détail puisque des remarques sont placées dans le but de le décortiquer. Nous nous attacherons à des points épineux. En ligne 210 l'égalité des deux drapeaux est réelle uniquement s'ils sont nuls puisque les tests précédents éliminent les autres possibilités. Il s'agit du cas ou l'intervalle serait uniquement positif. En ligne 250 kk = 3 n'est utilisé que pour l'affichage dans le cas du seul calcul de l'intégrale. De la ligne 270 à 330 il s'agit de l'analyse de la parité de la fonction. On calcule f(x) et f(− x) et on les compare. Elle ne sera ni paire ni impaire si la valeur absolue des deux fonctions est différente. Dans ce cas on a kk = 0 ce qui permet de calculer la valeur AO qui est nulle pour une fonction paire ou impaire. Le test de parité est fait approximativement de − pi à pi. En 370 si la fonction est paire on simplifie les calculs en calculant deux fois (ligne 550) l'intégrale